La grafica di TikZ & PGF

Un percorso di base

di Riccardo Nisi

Settembre 2009

r underscore nisi at tin dot it

Indice

1 Premessa

Il pacchetto `TikZ` è un'interfaccia che mette a disposizione dell'utente TeX e LaTeX un sistema di macro-comandi che facilitano l'utilizzo delle primitive `PGF` (Portable Graphics Format) permettendone un utilizzo indiretto semplificato. `PGF` produce un codice indipendente dai driver che lo gestiranno e potrà essere elaborato da vari driver tra cui `dvips` e `pdftex` producendo output `PostScript` o `PDF`. Ma diversamente dal pacchetto `PSTriks` non ha accesso al linguaggio `PostScript` con conseguenti limitazioni nel tracciamento delle funzioni. D'altre parte `PGF` basandosi proprio sul `PDF` gestisce al meglio il lavoro del compilatore `pdftex` che produce direttamente documenti `PDF`, e poi ha un proprio motore matematico a cui si rivolge per effettuare i calcoli.

La possibilità di `TikZ` di inserire un testo in un nodo (sez. 2.1 con codice) mi ha dato la possibilità di collegare figura e commento in modo secondo me accattivante ma poco compatibile con la numerazione automatica delle figure di `\includegraphics` a cui ho rinunciato.

Come per chiunque voglia utilizzare TikZ il mio riferimento è stato Till Tantau, *TikZ & PGF, Manual for Version 2.00*, 2008, e poi i numerosissimi esempi di http://www.texample.net/tikz/examples/. Nella mia esposizione di autodidatta più che dare esempi ho cercato di descrivere come TikZ si muove in alcuni contesti. Ho toccato alcune questioni di geometria piana che evidenziano uno specifico sistema di macro; le curve di Bézier mostrando che con esse non è difficile organizzare semplici disegni, oltre alle applicazioni professionali che certamente esulano da questo ambito; e come `TikZ` & `PGF` affrontano con le proprie forze il tracciamento di funzioni e curve[1].

2 Geometria con TikZ

Una breve presentazione di alcune macro più utilizzate.

Coordinate Con il termine `coordinate`, come con `rectangle` e `circle` si intendono delle `shapes` predefinite. Le `coordinate` come pure i `nodi` sono elementi di un percorso e la loro definizione dovrebbe essere del tipo `\path[shape=coordinate] (0,0)coordinate(a) (2,3) coordinate(b)`. Ma le modalità d'uso sono: il più diretto `\coordinate(a) at (2,1)`, articolato `\coordinate[label=60:$F$](f) at (intersection of a--c and b--d)`, o `\coordinate[label= below left:\textcolor{black}{$\scriptstyle A(1,-1)$}] (a) at (1,-1)`. Una `shape` come `circle` può essere colorata `\filldraw (3,0) circle (4pt)`. Vedi sez. 2.6, 2.9, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6.2

Punto di un segmento Se con `z` si indica un numero razionale, la macro `(a)!z!(b)` individua uno specifico punto della retta per `(a)`, `(b)`, i nodi che individuano i due punti. Il codice `\coordinate (c) at ($(a)!1.5!(b)$);` assegna a `(c)` le coordinate del punto di `(a)--(b)` che dista da `(a)` 1,5 volte la distanza `(a)-(b)`. Se `z=1` il punto `(c)` coincide con `(b)`, se `z=o` con `(a)`. [2] Vedi sez. 2.1, 2.5

Rotazione di un segmento Se la distanza iniziale tra i punti `(a)` e `(b)` è `d`, la macro `(a)!z!30:(b)` definisce un nuovo punto alla distanza `z*d` da `(a)` e lo ruota di 30° rispetto alla direzione iniziale, se `z=1` si ha un nuovo segmento ruotato attorno ad `(a)` che conserva la lunghezza originale. Per associare la nuova posizione con un nodo, il codice `\coordinate (c) at ($(a)!0.5!30:(b)$);` individua il punto centrale di `(a)--(b)` lo ruota di 30° e mette in `(c)` le sue coordinate.

Distanza punto retta La macro `(c)!zcm!90:(b)` è diversa dalla precedente in quanto si ha che fare con una lunghezza: dal punto `(c)` del segmento `(c)--(b)` si prende un segmento lungo `zcm` perpendicolare a `(c)--(b)`. In genere il punto (c) vuole indicare che partendo da `(a)!z!(b)` si è già intervenuti sulla linea `(a)--(b)` scegliendo, ad esempio, il suo centro, e in questo caso il codice `\coordinate (d) at ($(c)!1cm!90:(b)$);` assegnerà a `(d)` le coordinate del punto dell'asse di `(a)--(b)` che dista da `(c)` 1cm. Vedi sez. 2.1, 2.2, 2.5

Coordinate polari Le coordinate polari si indicano $(\alpha : r)$, dove r è applicato nell'origine dell'ambiente `tikzpicture`. Nel caso di un punto di coordinate $(\alpha : r)$ la sua proiezione sull'asse delle ascisse può essere ottenuta da ($\alpha : r$ |- 0,0). Per proiettare sulle rette $y = b$ e $x = a$, ($\alpha : r$ |- a,b) e ($\alpha : r$ -| a,b).

Proiezione punto su retta Dati i punti non allineati `(a),(b),(c)`, la macro `($(a)!(c)!(b)$)` proietta ortogonalmente il punto `(c)` sulla retta di `(a)--(b)` e il codice `\coordinate (h) at ($(a)!(c)!(b)$);`

[1] La data della intestazione è quella che chiude la preparazione e stesura del documento cui è seguita una lunga pausa. La revisione e una certa sistemazione tipografica sono terminate il 2 marzo 2010.

[2] Un esempio: `(c)=(a)-z*(a)+z*(b)`. Se (a)=(2,4), (b)=(5,2) e z=0.3, c_x = 2 -2*0.3 +5*0,3=2.9 e c_y = 4-4*0.3+2*0.3= 3.4.

assegna ad `(h)` le coordinate della proiezione. Volendo tracciare l'altezza per `(c)` del triangolo di vertici `(a),(b),(c)` il codice sarà `\draw (c) -- ($(a)!(c)!(b)$);`. Vedi sez. 2.1, 2.2, 2.5

Tangenti Quanto alla tangenza, se si ha un nodo `(c)` con la forma di una circonferenza di centro `(o)` (dato da `\node[circle, draw] (c) at (o)[minimum size=1cm]{}` dove con minimum size si intende precisare che, trattandosi di un nodo, la circonferenza può contenere un testo più lungo del diametro e allora il raggio aumenterebbe fino a contenerlo) si possono calcolare i punti di contatto e tracciare le tangenti condotte da un punto esterno `(a)`. La macro parola-chiave è *tangent*: `\draw[red](a) -- (tangent cs: node=(c),point{(a)}, solution=1) -- (c.center)--(tangent ...,solution=2) -- cycle;`. Vedi sez. 2.5

Intersezioni TikZ calcola le intersezioni tra linee, tra una circonferenza nodo e una linea, tra circonferenze. In questo aiuta la parola chiave `through` che, dato il centro, permette a `draw` di tracciare la circonferenza per un altro punto; i due punti definiscono il raggio. Tratta in maniera specifica la perpendicolarità. I codici `(2,1 |- 3,4)` e `(3,4 -| 2,1)` sono equivalenti; il primo proietta verticalmente il punto (2,1) su y=4, il secondo orizzontalmente il punto (3,4) su x=2, la proiezione comune è (2,4). In un riferimento cartesiano ad assi ortogonali, può essere utile definire una retta -xline- come un nodo. `(P1)` sia un nodo e il codice `\draw (-1,0) -- (1,0)node(xline)[right]{}` traccia un segmento che è un nodo. Per tracciare un segmento perpendicolare basterà `\draw[->] (P1) -- (P1|- xline)`. Vedi 2.3, 2.8, 2.6.1, 2.6.2, 2.9

Arc L'operatore `arc(180,90,r)` inizia a tracciare l'arco a partire dalla coordinata angolare 180° e termina nella coordinata 90° di una circonferenza di raggio `r`; il centro è determinato di conseguenza. L'arco di cui si è detto inizia dal punto corrente della pagina. Un arco sarà tracciato da un'istruzione del tipo `\draw [] (0,0) arc(180,90,2cm)`. Vedi sez. 2.6.1, 2.6.2, 2.7, 2.3

Let,registri,uso TikZ mette a disposizione registri che possono memorizzare le coordinate di un punto, `\p` , e separatamente un'ascissa, `\x`, e un'ordinata `\y`. Se il punto è `p1` le sue coordinate prese anche separatamente saranno `\x1` e `\y1`. Un numero intero sarà messo nel registro `\n`. Il comando `let` va inserito nel contesto di un altro comando, le operazioni sotto l'azione di `let` terminano con `in`. Ad esempio `\path let\p1=(2,3), \p2=(a), \p{centro}= ($(\p1)! 0.5!(a)$) in coordinate (centro) at \p{centro} coordinate(p1) at (\p1)`. Oppure: per tracciare una circonferenza con centro (c) e tangente nel punto della proiezione ortogonale di (c) sulla retta per (a), (b), puntualizzando che la differenza `$(a)!(c)!(b) - (c)$` sottrae dalle coordinate del punto di tangenza quelle del centro ottenendo che la circonferenza abbia il suo centro nell'origine e che `{veclen(\x1,\y1)}` ne calcoli la lunghezza del raggio : `\draw let \p1 = ($ (a)!(c)!(b) - (c) $), \n1 = {veclen(\x1,\y1)}in (c) circle (\n1)`.

Nell'esempio 2.3 è stato utilizzato `let` per provare la perpendicolarità di due segmenti. L'istruzione `\fill[red] let \p1=(f),\p2=(h) in (\x2,\y1) circle (2pt);` mette le coordinate dei punti `(p)` e `(h)` nei registri `\p1` e `\p2` e traccia un punto che ha l'ascissa di `(h)` e l'ordinata di `(f)`. In questo modo, sostituendo l'ascissa del punto di intersezione delle corde con quella sul diametro senza che nel grafico muti qualcosa prova che il segmento appartiene alla retta `x=x1`, che è `|-` alla base. Anche nel quinto esempio, 2.5, si utilizza `let` per provare che due segmenti sono congruenti e lo si fa mostrando che il punto `(m)` e il centro `(k)!.5!(h)` del segmento `(k)--(h)` coincidono misurando la distanza fra quei due punti che, con lo stesso criterio della differenza visto sopra, dovrebbe risultare nulla. Ma il motore di calcolo ha i suoi limiti di precisione e la differenza risulta dell'ordine del centesimo di punto (0.004mm) per cui ci sarà risposta affermativa se `\ifdim\n1 < .1pt`. Vedi sez. 2.3, 2.5

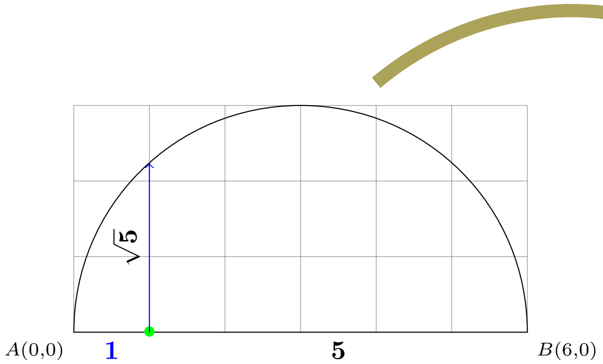
Foreach Un altro comando indispensabile è `\foreach \var in {lista} {comandi da eseguire}`. La variabile si può riferire a numeri come a caratteri e può essere di tipo punto-nodo, oppure può gestire più variabili: `\foreach \ang/\r in {0/1,30/2, 60/3,90/4,120/5,150/6} \fill[green] (\ang:\r) circle (3pt)`. Vedi 2.2, 2.6.2

Nodi I nodi sono oggetti collocabili nella posizione scelta con il compito principale di poter creare collegamenti con altri oggetti del piano. Possono avere forme diverse, in particolare possono rappresentare punti del piano. In questo caso si tratta di nodi *leggeri* e in una costruzione geometrica è comodo codificarli con il comando `\coordinate` che con la sua parte opzionale può rappresentare, collegato al punto - nodo, un simbolo, un carattere, una breve stringa. Se si tratta di definire più punti è opportuno definirli con il comando `\path` che permette di definire più nodi o coordinate nella stessa istruzione oppure si usano i comandi `\coordinate` o `\node` uno alla volta: `\coordinate[label=below left:textcolor{red} {$\scriptstyle A(1,2)}] (a) at (1,2);` oppure con `\node at (1,2) (A) {$\bullet}`. Per colorare un oggetto-nodo `\fill[green] node at (c) {$\bullet$}`.
Il nodo ha strumenti come `anchor` per essere ben collegato ad altri elementi del grafico. `\draw[anchor=base] (A.center) -- +(90:1)`. Un nodo `(c)` può essere una circonferenza con centro (A) assegnato; `\node[circle,draw] (c) at (A) [minimum size=2cm] {};`. Oppure la circonferenza (c1) con centro in (o) e passante per (A): `\node(c1) at (o)[draw,circle through=(a)]{}`. In alcuni casi, come il tracciamento di elementi perpendicolari, può risultare utile definire una linea come un nodo. Ma il nodo per la sua capacità di posizionarsi nell'ambiente `tikzpicture` è usato anche per collocare brevi testi nel contesto della figura. Vedi sez.2.2, 2.8, 2.4, 2.6.1, 2.6.2
Si propone il caso di un nodo con diverse opzioni che ne evidenziano la flessibilità. `\node[rectangle, draw=blue,thick,fill=blue!20,text width=5cm, text centered/ragged, rounded corners, minimum eight=4cm]{testo};`

Preambolo Package e librerie per TikZ e PGF, le librerie non sono tutte necessarie a questo documento LaTeX.

```
\usepackage{tikz,fp,ifthen,fullpage}
\usepackage{pgfmath}
\usetikzlibrary{backgrounds}
\usetikzlibrary{decorations.pathmorphing,backgrounds,fit,calc,through}
\usetikzlibrary{arrows}
\usetikzlibrary{shapes,decorations,shadows}
\usetikzlibrary{shapes.scopes}
\usetikzlibrary{fadings}
\usetikzlibrary{patterns}
\usetikzlibrary{mindmap}
\usetikzlibrary{decorations.text}
\usetikzlibrary{decorations.shapes}
```

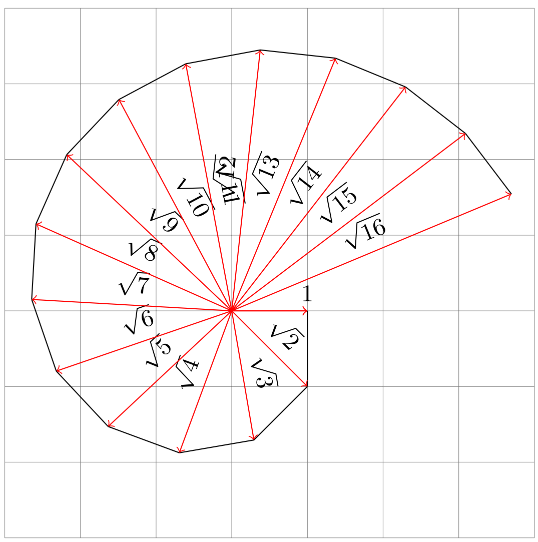
2.1 II t. di Euclide per determinare $\sqrt{n}$



In un triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza la proiezione di un cateto sull'ipotenusa sia 1, allora l'altezza relativa all'ipotenusa sarà $\sqrt{2r-1}$. Se `(a)` e `(b)` sono gli estremi del diametro lungo 6 la proiezione del vertice retto sul diametro si ottiene da `\coordinate (c) at ($(a)!1/6!!(b)$)` . Segue il codice in cui il calcolo è effettuato da comandi `pgf`: `\pgfmathsqrt{5}` per calcolare la radice quadrata, `\pgfmathresult` per rendere disponibile il valore di $\sqrt{5}$ e calcolare le coordinate `(d)` del vertice del triangolo.
`\pgfmathsqrt{5}`
`\coordinate (d) at ($(c)!\pgfmathresult cm!90:(b)$);`

```
\begin{tikzpicture}
\draw[help lines] (0,0) grid (6,3);% traccia la maglia
\draw[] (0,0) arc (180:0:3) -- cycle;% semicirconferenza e diametro
\coordinate [label=below left:\textcolor{black}{$\scriptstyle A(0,0)$}](a) at (0,0);
\coordinate [label=below right:\textcolor{black}{$\scriptstyle B(6,0)$}](b) at (6,0);
\coordinate [label=below:\textcolor{black}{$\mathbf{5}$}] (u) at (3.5,0);
\coordinate [label=below:\textcolor{blue}{$\mathbf{1}$}] (v) at (0.5,0);
\coordinate (c) at ($(a)!{1/6}!(b)$);
\pgfmathsqrt{5};
\coordinate (d) at ($(c)!\pgfmathresult cm!90:(b)$);
\fill[green] node at (c)  {$\bullet$};
\draw [->,blue] (c) -- (d) node [black,sloped,midway,above] {$\mathbf{\sqrt 5}$};
%-- Inizia il nodo del commento
\draw (12,1) node[fill=black!40!yellow,text ragged,text width=9.5cm]
{In un triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza la proiezione di un
cateto sull'ipotenusa sia $1$, allora l'altezza relativa all'ipotenusa sar\`a $\sqrt{2r-1}$.
Se (a) e (b) sono gli estremi del diametro lungo 6 la proiezione del vertice retto
sul diametro si ottiene da \coordinate (c) at ($(a)!1/6!!(b)$). Segue il codice
in cui il calcolo \`e effettuato da comandi pgf: \pgfmathsqrt{5} per calcolare
la radice quadrata, \pgfmathresult per rendere disponibile il valore di $\sqrt5$
e calcolare le coordinate (d) del vertice del triangolo.
\pgfmathsqrt{5}
\coordinate (d) at ($(c)!\pgfmathresult cm!90:(b)$);}
%-- termina il nodo
%-- La freccia curva verde
\draw [->,line width=5pt,black!40!yellow] (4,3.3) arc(130:65:4);
\end{tikzpicture}
```

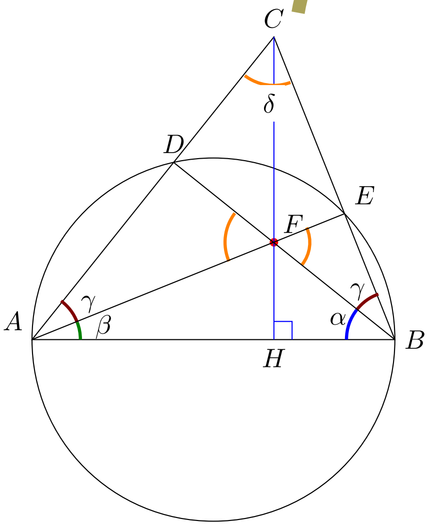
2.2 Costruzione grafica delle prime sedici radice quadrate



Si vogliono ottenere graficamente segmenti la cui lunghezza è la radice quadrata dei primi 16 naturali. Si inizia con `\draw[->,red](o)--(a)` che traccia un segmento orientato unitario uscente dall'origine dopo di che dall'estremo libero, con `\draw (a)--(b)`, si traccia un segmento unitario ortogonale ad `(o)--(a)`, e con `(o)--(b)` l'ipotenusa uscente dall'origine che avrà lunghezza $\sqrt{2}$. Disponendo con `foreach` la ripetizione del ciclo si ottengono le altre ipotenuse. I passaggi chiave di un ciclo: con `\coordinate (c) at ($ (b)!1cm!90:(o) $)` si costruisce la perpendicolare per `(b)` ad `(o)--(b)` e su questa si prende il punto `(c)` che dista 1cm; con `\draw[anchor=base] (b.center) --(c)` si traccia la corda unitaria considerando `(b)` base del nodo per garantire la giustezza del tracciato e si chiudono i tracciamenti disegnando il segmento orientato `(o)--(c)`.
Il ciclo sarebbe terminato, ma prima di passare il successivo, che inizierà da `(b)`, occorre fare in maniera che `(b)` diventi l'estremo dell'ipotenusa. Questo avviene con `\node(b) at (c)`.
Le linee del codice, in particolare quelle del ciclo `foreach`, sono riportate sotto.
A 90° e a 270° l'opzione `sloped` ruota le radici quadrate di 180°, solo che ai 90° la lunghezza del testo provoca una sovrapposizione. D'altra parte rinunciando a `sloped` la lettura delle radici diventerebbe sgradevole.

```
\draw[help lines] (0,0) grid (7,7);
\coordinate (o) at (3,3); \coordinate (a) at (4,3); \coordinate (b) at (4,2);
%--
\draw[->,red](o)--(a);
\draw [->,red] (o) -- (a) node [black,sloped,at end,above] {\small$1$};
\draw (a)--(b);
\draw [->,red] (o) -- (b) node [black,sloped,midway,above] {\small$\sqrt{2}$};
%--
\foreach \z in {3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16}
{\coordinate (c) at ($ (b)!1cm!90:(o) $);
\draw[anchor=base] (b.center) --(c);
\draw [->,red] (o) -- (c) node [black,sloped,midway,above] {\small$\sqrt{\z}$};
\node(b) at (c){};
}
```

2.3 Secanti e perpendicolarità

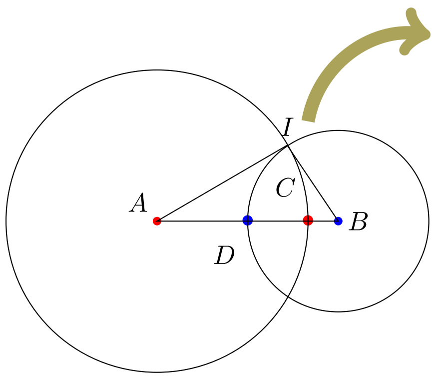


Se da un punto C esterno alla circonferenza si conducono le secanti per gli estremi A e B di un diametro e le corde AE e DB si tagliano in un punto F, allora la retta CF sarà perpendicolare ad AB. Come è possibile mostrare tramite le macro TikZ. Con `\coordinate[label=60:$F$] (f) at (intersection of a--e and b--d)` e `\coordinate[label=-90:$H$] (h) at ($(a)!(c)!(b)$)` si determinano i nodi (f) e (h) con le coordinate dei punti F e H e con `\fill[red] let\p1=(f), \p2=(h) in (\x2,\y1) circle(2pt)` si mostra che il punto F può essere evidenziato nella posizione prevista anche utilizzando l'ascissa di H e l'ordinata di F, possibile soltanto se CH è verticale e `|-` ad AB. In proposito vedi l'*item* su `let`.
Nel piano euclideo. Gli angoli siano $\widehat{ABD} = \alpha; \widehat{EBD} = \widehat{DAE} = \gamma; \widehat{EAB} = \beta; \widehat{ACE} = \delta$. Da $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ e $\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}$ segue: $\delta = \alpha + \beta$ e che $\widehat{DFA} = \delta$. Poiché $\widehat{FCE} = \frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma \Rightarrow \widehat{CFE} = \alpha + \gamma$; e $\widehat{FCD} = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma \Rightarrow \widehat{AFH} = \beta + \gamma$ segue che essendo la somma degli angoli acuti dei triangoli FHA e FHB data da $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ essi sono rettangoli in H.
Varie righe di `\draw` riguardano il tracciamento di brevi archi a segnalare gli angoli: si inizia con l'indicare il nodo di riferimento, si prosegue con le coordinate polari di un punto precedute dal segno + ad indicare il posizionamento del punto corrente relativamente al nodo; l'istruzione termina con il tracciamento dell'arco che inizia dal punto corrente e ha centro nel nodo.

```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
\coordinate (o) at (3,0);
\coordinate [label=150:$A$](a) at (0,0);
\coordinate [label=0:$B$](b) at (6,0);
\coordinate[label=90:$C$] (c) at (4,5);
\draw (a) -- (b) -- (c) -- cycle;
\node(c1) at (o)[draw,circle through=(a)] {};
\coordinate[label=90:$D$] (d) at (intersection 1 of c1 and a--c);
\coordinate[label=80:$E$] (e) at (intersection 1 of c1 and b--c);
\coordinate[label=60:$F$] (f) at (intersection  of a--e and b--d);
\coordinate[label=-90:$H$] (h) at ($(a)!(c)!(b)$);
\fill[red] let \p1=(f),\p2=(h) in (\x2,\y1) circle (2pt);
\draw[blue] (c) -- ($(a)!(c)!(b)$);
\draw [blue,very thick](b) +(142:.8cm) arc (142:180:.8cm);
\draw [color=black](b)+(160:1) node[rotate=0] {$\alpha$};
\draw [green!50!black,very thick](a) +(0:.8cm) arc (0:21:.8cm);
\draw [color=black](a)+(10:1.2) node[rotate=0] {$\beta$};
\draw [red!50!black,very thick](a) +(21:.8cm) arc (21:53:.8cm);
\draw [color=black](a)+(32:1.1) node[rotate=0] {$\gamma$};
\draw [red!50!black,very thick](b) +(110:.8cm) arc (110:142:.8cm);
\draw [color=black](b)+(128:1) node[rotate=0] {$\gamma$};
```

```
\draw [orange,very thick](c) +(-70:.8cm) arc (-70:-127:.8cm);
\draw [color=black](c)+(-94:1.1) node[rotate=0,fill=white] {$\delta$};
\draw [orange,very thick](f) +(143:.8cm) arc (143:203:.8cm);
\draw [orange,very thick](f) +(24:.6cm) arc (24:-38:.6cm);
\draw (a) -- (e);
\draw (d) -- (b);
\draw[anchor=base,color=blue] (h.center)  ++(.3,0)  -- ++(0,0.3) -- ++(-0.3,0);
```

2.4 Costruzione di un triangolo assegnati i segmenti

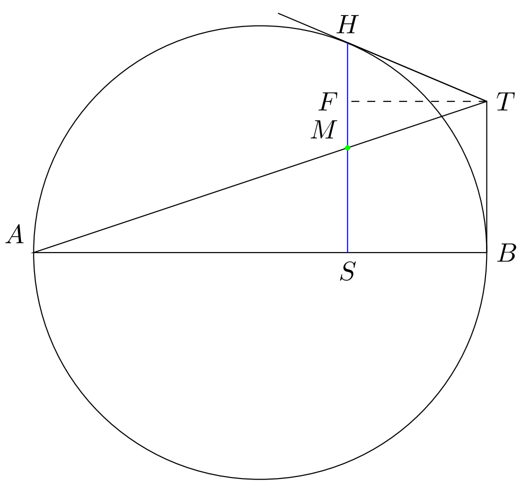


Dati tre segmenti tali che la lunghezza di ciascuno di essi sia minore della somma di quella degli altri due con essi è possibile costruire un triangolo. Ad esempio con i segmenti $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 4$ e $\overline{DB} = 3$ si costruisce il triangolo richiesto. L'intersezione I della circonferenza di centro A e raggio AC con quella di centro B e raggio BD costruisce il triangolo ABI avente per lati i segmenti assegnati. Il codice per le intersezioni:

```
\node(c1) at (a)[draw,circle through=(c)] {};
\node(c2) at (b)[draw,circle through=(d)] {};
\coordinate [label=90:$I$] (i) at
(intersection 2 of c1 and c2);
```

```
\begin{tikzpicture}[scale=0.4]
\coordinate [label=150:$A$](a) at (0,0);
\coordinate[label=0:$B$](b) at (6,0);
\fill[red] (a) circle (4pt);
\fill[blue] (b) circle (4pt);
\node [red,label=100:$C$](c) at (5,0){$\bullet$};
\node [blue,label=-100:$D$](d) at (3,0){$\bullet$};
\node(c1) at (a)[draw,circle through=(c)] {};
\node(c2) at (b)[draw,circle through=(d)] {};
\coordinate [label=90:$I$] (i) at (intersection 2 of c1 and c2);
\draw (a) -- (b)-- (i) -- cycle ;
\draw (20,0) node[fill=black!40!yellow,text ragged,text width=8cm]
{Testo del nodo rettangolare a sfondo colorato}
\draw [->,line width=5pt,black!40!yellow] (5,3.3) arc(170:80:3.5);
\end{tikzpicture}
```

2.5 TA biseca HS



Dato un punto T esterno ad una circonferenza, condotte le tangenti TB e TH, detta S la proiezione di H sul diametro AB, allora TA biseca HS in M. Non sarebbe difficile risolvere il problema con la geometria euclidea e le equazioni irrazioinali. Ma è certamente più appropriato venirne a capo con le macro TikZ.

Il programma inizia definendo le coordinate dei punti T, B, A, e del centro (o) della circonferenza, poi definisce come `nodo` e traccia la circonferenza di centro (o) e raggio $(o) - (a)$; definisce la tangente che da (t) tocca in (k) la circonferenza riconoscendola l'etichetta H, la prolunga di 0.5 con `\draw (t) -- ($(t)!1.5!(k)$)` e la traccia con l'istruzione `\draw[black]`. Traccia da (k) la perpendicolare al diametro, `\draw[blue](k) at ($(a)!(k)!(b)$)` e indica con (h) la proiezione di (k) ponendogli l'etichetta S; trova l'intersezione (m) tra `a--t and h--t` e proietta (t) su `(k)--(m)` indicando con (f) la proiezione. Le operazioni descritte servono a costruire la figura. Si tratta ora di provare la tesi: (m) biseca $(k) - -(f)$.

Utilizzando `let` con i registri `\p`, per i nodi e `\n`, per le distanze, il codice prova che la distanza tra il nodo `(m)` e il centro di HS è nulla (in effetti il motore di calcolo ha una precisione dell'ordine del $\frac{1}{100}$ di pt.). Vedi la voce Let.

```
\fill[green] let \p1=($(m)-(k)!.5!(h)$),
          \n1={veclen(\x1,\y1)} in
          \ifdim\n1 < .1pt { (m) circle (1pt)}
          \else {(m) circle (1ex)}\fi;
```

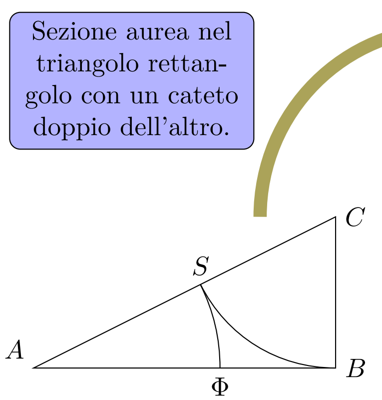
```
\coordinate [label=150:$A$](a) at (0,0);
\coordinate [label=0:$B$](b) at (6,0);
\coordinate [label=0:$T$](t) at (6,2);
\coordinate (o) at (3,0);
\draw (a) -- (b)-- (t) -- cycle ;
\node(c1) at (o)[draw,circle through=(a)] {};
\coordinate [label=90:$H$](k) at (tangent cs:node=c1,point={(t)},solution=1);
\draw (t) -- ($(t)!1.5!(k)$);
\draw[black] (t) -- (tangent cs:node=c1,point={(t)},solution=1);
\draw[blue] (k) -- ($(a)!(k)!(b)$);
\coordinate[label=-90:$S$] (h) at ($(a)!(k)!(b)$);
\coordinate[label=120:$M$] (m) at (intersection  of a--t and h--k);
\coordinate[label=180:$F$] (f) at ($(k)!(t)!(m)$);
\fill[green] let \p1=($(m)-(k)!.5!(h)$),
          \n1={veclen(\x1,\y1)} in
         \ifdim\n1 < .1pt { (m) circle (1pt)} \else {($(k)!.5!(h)$) circle (1ex)} \fi;
\draw[dashed] (t) -- ($(k)!(t)!(h)$);
```

2.6 Sezione aurea

Un punto divida un segmento in due parti tali che una è media proporzionale tra l'intero segmento e l'altra, in tal caso la parte media proporzionale si dice che è la sezione aurea del segmento considerato. Sia AB l'intero segmento 

se C un suo punto interno tale che $AB : AC = AC : CB$, la parte maggiore AC è la sezione aurea. Se $\overline{AB} = l$ e $\overline{AC} = x$ la proporzione sarà $l : x = x : (l - x)$ da cui l'equazione $x^2 + lx - l^2 = 0$, la cui la soluzione positiva è $\frac{\sqrt{5}-1}{2}l$, che è la sezione aurea del segmento lungo l.

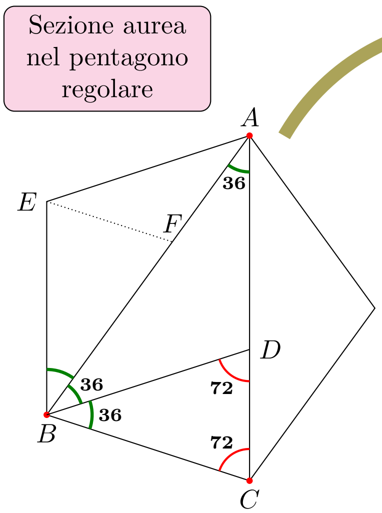
2.6.1 Sezione aurea nel triangolo rettangolo



Una costruzione geometrica della sezione aurea può essere ottenuta dal triangolo rettangolo ABC in cui la lunghezza del cateto maggiore $\overline{AB} = l$ è doppia di quella di BC e in cui l'ipotenusa sarà $\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}l$ (nella figura a fianco $l = 4$). Per individuare il punto S si traccia l'arco BS. Considerata la circonferenza di centro C e raggio 2 l'arco BS, che procede in senso orario, ha il suo opposto nel 1°Q che inizia dall'angolo la cui tangente è 0.5 e termina a 90°, procedendo in senso antiorario. Per portarlo nel 3°Q e farlo procedere in senso orario basterà porre r negativo; il codice sarà `\draw(4,0) arc(90:atan(.5):-2)`. E il segmento AS, che misura $\frac{\sqrt{5}-1}{2}l$, riportato su AB individua $A\Phi$, la sezione aurea di AB.

```
\coordinate [label=150:$A$](a) at (0,0);
\coordinate [label=0:$B$](b) at (4,0);
\coordinate [label=0:$C$](c) at (4,2);
\draw (a) -- (b)-- (c) -- cycle ;
\draw (4,0) arc(90:atan(.5):-2);
\node(c1) at (c)[circle through=(b)] {};
%--
\node [text width=3cm, fill=blue!30,draw,rectangle,rounded corners, text centered]
        at (1.3,3.8){Sezione aurea nel triangolo rettangolo con un cateto doppio
        dell'altro.};
%--
\coordinate[label=90:$S$](i) at (intersection 2 of a--c and c1);
\node(c2) at (a)[circle through=(i)] {};
\coordinate[label=-90:$\Phi$](s) at (intersection 1 of a--b and c2);
\draw (s) arc(0:atan(.5):{(sqrt(5)-1)*2});
```

2.6.2 Sezione aurea e pentagono

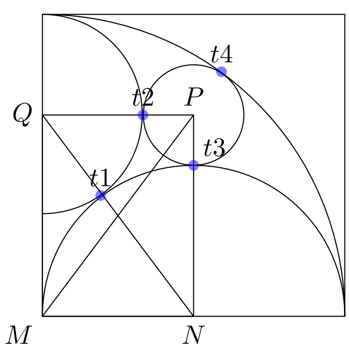


L'approccio più classico alla sezione aurea è quello con il pentagono regolare. Il lato del pentagono è la sezione aurea della sua diagonale. Il triangolo ABC è costruito su due diagonali. Il punto D si ottiene intersecando AC con la circonferenza di centro B e raggio BC per cui BCD è isoscele sulla base DC. Gli angoli del pentagono misurano 108° e i tre angoli formati dalle diagonali uscenti da A, come angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti, avranno l'ampiezza di 36°. Ne segue che gli angoli alla base di ABC avranno ampiezza 72° come gli angoli alla base di BCD in cui l'angolo CBD misurerà 36°. Guardando al triangolo BDA, l'angolo $\widehat{ABD}$ risulterà di 36°, sarà isoscele con base AB. E così BC, BD e AD saranno congruenti. Dalla similitudine tra i triangoli BCD e ABC si avrà $AC : BC = BC : CD$ o, viste le precedenti congruenze, $AC : AD = AD : DC \Rightarrow$ il lato del pentagono regolare è la sezione aurea della diagonale.
Tornando alla circonferenza di centro B e raggio BC essa taglierà la diagonale AB in F e passerà per E. Questo mostra che non solo ABC è un triangolo aureo ma che lo è in un certo qual modo anche ABE, chiamato gnomone aureo, in cui il rapporto tra il lato e la base è l'inverso del rapporto aureo.
Sia triangolo che gnomone aureo possono essere indefinitamente scomposti in aureo e gnomone. Sotto alcune linee di codice.

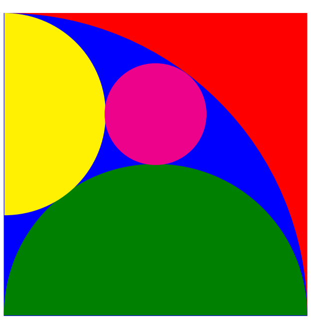
```
% Nel preambolo: \newdimen\R; \R=4cm
% Il clip per eliminare le circonferenze solo definite per alcune
% costruzioni che comportano lo stesso ingombro che se tracciate.
\begin{tikzpicture}[scale=0.6]
\clip (-4.2,-12.3) rectangle (23.3,6.8);
\draw (0:\R) \foreach \x in {72,144,...,360} { -- (\x:\R)} -- cycle;
\draw (72:\R) -- (216:\R);
\draw (72:\R) -- (288:\R);
\coordinate[label=180:$E$] (m) at (144:\R);
\coordinate[label=90:$A$] (a) at (72:\R);
\coordinate[label=-90:$B$] (b) at (216:\R);
\coordinate[label=-90:$C$] (c) at (288:\R);
\foreach \punto in {a,b,c} \fill[red] (\punto) circle (2pt);
\node (c1) at (b)[circle through=(c)] {};
\coordinate (s) at (intersection  1 of c--a and c1);
\coordinate (u) at (intersection  1 of b--a and c1);
\coordinate[label=0:$D$] (d) at (s);\coordinate[label=90:$F$] (f) at (u);
\draw [red,thick](c) +(90:.7cm) arc (90:162:.7cm);
\draw [red,thick](d) +(-90:.7cm) arc (-90:-162:.7cm);
\draw [green!50!black,very thick](b) +(-18:1cm) arc (-18:18:1cm);
\draw [green!50!black,very thick](a) +(-90:.8cm) arc (-90:-126:.8cm);
\draw [color=black] (c)+(126:1.05) node[rotate=0] {\bfseries\scriptsize 72};
```

```
\draw [color=black](d)+(54:-1.05) node[rotate=0] {\bfseries\scriptsize 72};
\draw [color=black](b)+(0:1.4) node[rotate=0] {\bfseries\scriptsize 36};
\draw [color=black](a)+(72:-1.1) node[rotate=0] {\bfseries\scriptsize 36};
\draw [color=black](b)+(34:1.2) node[rotate=0] {\bfseries\scriptsize 36};
```

2.7 Archi di circonferenza in un quadrato



Si vogliono iscrivere in un quadrato, lato $l = 4$, quattro archi di circonferenza tra loro tangenti. Il primo arco ha per raggio il lato l del quadrato il secondo $\frac{l}{2}$; i raggi di `c3` e di `c4`, da calcolare, siano y e x. Il fatto che la circonferenza `c4` è tangente agli archi di `c2` e di `c3` pone il suo centro P sugli assi per Q e per N dei diametri delle semicirconferenze: i tre lati di PQN sono formati dai raggi di c3+c4, di c4+c2, di c2+c3 infatti la tangente per `t1` comune a `c2` e `c3` è normale a QN e pone $\overline{QN} = 2 + y$; inoltre $\overline{PQ} = x + y = 2$ e $\overline{NP} = 2 + x$. Da $x + y = 2$ e $(y + 2)^2 = (x + 2)^2 + (x + y)^2$ si ottiene $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ e $P(2, \frac{8}{3})$. Da cui le coordinate per tracciare gli archi della figura. Verificando: il raggio $M - (t4) = 2 + y + x = 4$.
La figura con i colori mette in risalto quanto ottenuto.
Sotto il codice.



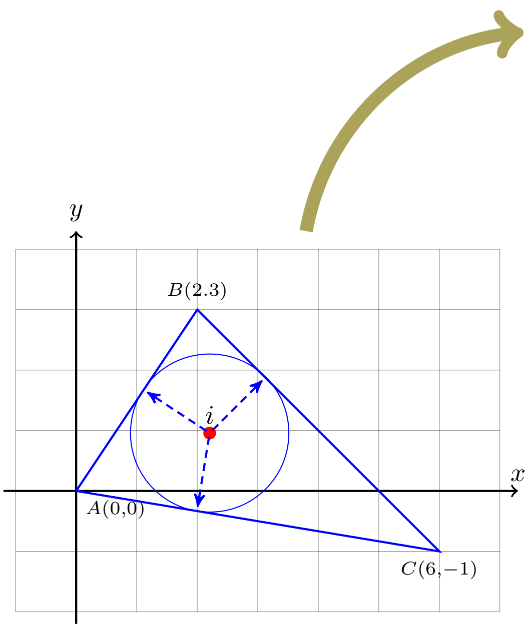
Il codice per la figura colorata.

```
\filldraw[red] (0,0)-- (4,0)-- (4,4)--(0,4)-- cycle;
\filldraw[blue] (4,0) arc (0:90:4)--(0,0) --cycle;
\filldraw[green!50!black] (4,0) arc (0:180:2);
\filldraw[yellow] (0,4) arc (90:-90:1.333);
\filldraw[magenta] (2,2.667) circle (.667);
```

```
\draw (0,0)-- (4,0)-- (4,4)--(0,4)-- cycle;
\draw (4,0) arc (0:90:4);
\draw (4,0) arc (0:180:2);
\draw (0,4) arc (90:-90:1.32);
\draw (2,2.667) circle (.665);
\coordinate [label=-135:$M$] (m) at (0,0);
\coordinate [label=-90:$N$] (n) at (2,0);
\coordinate [label=90:$P$] (p) at (2,2.667);
\coordinate [label=-180:$Q$] (q) at (0,2.667);
\draw (m) -- (n) -- (p) -- (q) -- cycle;
\draw (q) -- (n)  (p) -- (m);
\coordinate [label=90:$t1$] (t1) at (0.77,1.6);
```

```
\coordinate [label=90:$t2$] (t2) at (1.33,2.667);
\coordinate [label=60:$t3$] (t3) at (2,2);
\coordinate [label=90:$t4$] (t4) at (2.37,3.24);
\foreach \punto in {t1,t2,t3,t4} \fill[blue,opacity=.5] (\punto) circle (2pt);
```

2.8 Incentro e circonferenza inscritta



Si definisce lo `style corto` per tracciare la distanza tra due punti accorciata ad evitare sovrapposizioni tra segmento ed estremi e definendo il tipo di freccia, si tracciano gli assi cartesiani e si creano i nodi per i vertici del triangolo e si rappresentano le loro coordinate.

```
\begin{tikzpicture}[baseline,scale=.8,corto/.style=
{thick, ->, >=stealth', shorten <=1.5pt, shorten >=1.5pt}]
\draw[->,thick] (-1.2,0) -- (7.3,0) node (xaxis)[right]{$x$};
\draw[->,thick] (0,-2.2) -- (0,4.3) node (yaxis)[above]{$y$};
\coordinate [label=below right:\textcolor{black}
{$\scriptstyle C(6,-1)$}] (c) at (6,-1);
\draw[thick,blue] (a) -- (b) -- (c) -- cycle;
```

Poi si passa a determinare, costruire e intersecare le bisettrici degli angoli A e C. La costruzione è quella grafica classica. Guardando al caso di A: si costruisce la crf per A che interseca `a--b` in `u` e `a--c` in `v`. La circonferenza viene definita come un nodo che permette di includere una scritta e la particolarità che se la scritta superasse il minimo previsto per la circonferenza il raggio verrebbe aumentato di conseguenza.

```
\node[circle](c1) at (a)[minimum size=2cm]{};
\coordinate (u) at (intersection of a--b and c1);
\coordinate (v) at (intersection of a--c and c1);
```

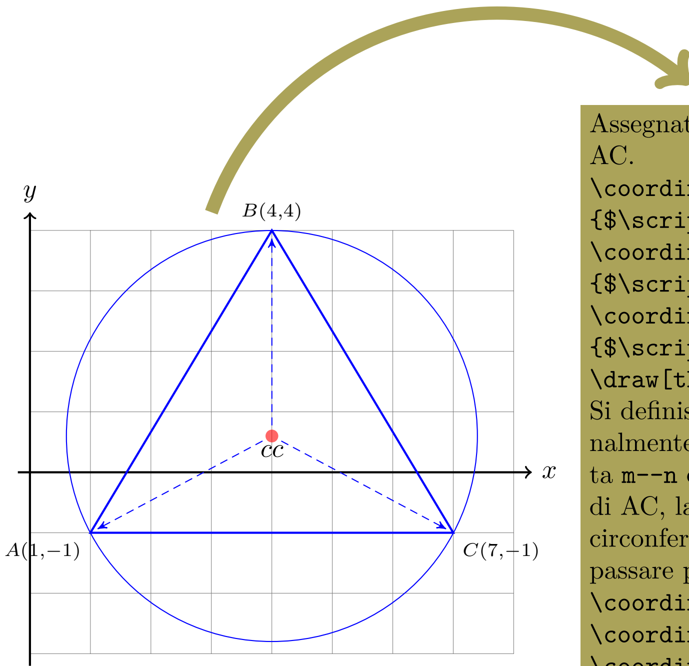
Poi si costruiscono con centro `u` e `v` le circonferenze `c3` e `c4` che si tagliano in `b1`, il punto che con il vertice `a` determina la bisettrice dell'angolo in A. Queste circonferenze costruite ma non tracciate sullo schermo e quindi non visibili impegnano lo stesso dominio che se lo fossero; non si mostrano per evitare di mostrare quattro o sei circonferenze utilizzate solo per costruire bisettrici o assi.

```
\node[circle](c2) at (u)[minimum size=2cm]{};
\node[circle](c3) at (v)[minimum size=2cm]{};
\coordinate (b1) at (intersection 2 of c2 and c3);
```

Lo stesso per il punto C determinando la bisettrice per `b2` e l'incentro `i` del triangolo. Si concluderà proiettando `i` sui tre lati, tracciando le tre distanze e la circonferenza inscritta.

```
\coordinate [label=90:$i$](i) at (intersection of a--b1
and c--b2);
\node(c7) at (i)[thin,blue,draw,circle through=
($(a)!(i)!(c)$)]{};
\fill[red] (i) circle(3pt);
\draw[blue,densely dashed,corto] (i) -- ($(a)!(i)!(c)$);
\draw[blue,densely dashed,corto] (i) -- ($(c)!(i)!(b)$);
\draw[blue,densely dashed,corto] (i) -- ($(b)!(i)!(a)$);}]
```

2.9 Circocentro e circonferenza circoscritta



Assegnati tre punti, si ricerca l'intersezione degli assi di AB e AC.

```
\coordinate [label=below left:\textcolor{black}
{$\scriptstyle A(1,-1)$}](a) at (1,-1);
\coordinate [label=above:\textcolor{black}
{$\scriptstyle B(4,4)$}](b) at (4,4);
\coordinate [label=below right:\textcolor{black}
{$\scriptstyle C(7,-1)$}](c) at (7,-1);
\draw[thick,blue] (a) -- (b) -- (c) -- cycle;
```

Si definisce con `m` il punto medio di AB e lo si proietta ortogonalmente 1cm sopra AB chiamando `n` questa proiezione. La retta `m--n` è l'asse del segmento cercato. La retta per `h--k` l'asse di AC, la loro intersezione, `cc`, il circocentro del triangolo. La circonferenza circoscritta ha centro in `cc` ed è definita facendola passare per il vertice A.

```
\coordinate (m) at ($(a)!0.5!(b)$);
\coordinate (n) at ($(m)!1cm!90:(b)$);
\coordinate (h) at ($(a)!0.5!(c)$);
\coordinate (k) at ($(h)!1cm!90:(c)$);
\coordinate [label=-90:$cc$](cc) at (intersection of
m--n and h--k);
\node(c1) at (cc)[thin,blue,draw,circle through=
($(a)$)]{};
\fill[opacity=.6,red] (cc) circle(3pt);
```

Lo stile `corto` viene definito come

```
corto/.style={thin, ->, >=stealth', shorten <=4pt,
shorten >=3pt}.
\draw[blue,densely dashed,corto] (cc) -- (a);
\draw[blue,densely dashed,corto] (cc) -- (b);
\draw[blue,densely dashed,corto] (cc) -- (c);
```

Si aggiungono le linee che tracciano la maglia e gli assi.

```
\draw [help lines] (0,-3) grid (8,4);
\draw[->,thick] (-0.2,0) -- (8.3,0) node (xaxis)[right]
{$x$};
\draw[->,thick] (0,-3.2) -- (0,4.3) node (yaxis)[above]
{$y$}.
```

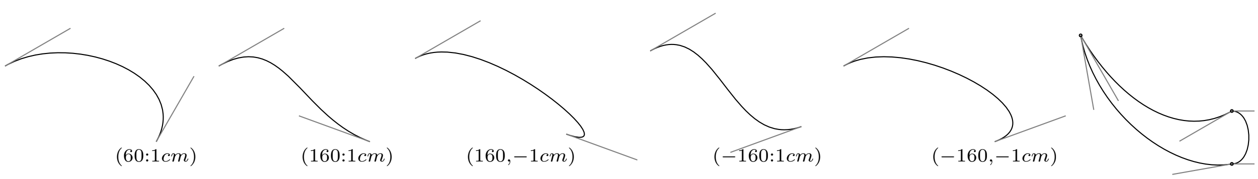
3 Curve di Bézier

Le curve di Bézier utilizzabili con `TikZ` sono curve del terzo ordine con uno o due punti di controllo che insieme con i punti estremi formano segmenti tangenti alla curva nei suoi estremi. L'andamento della curva risulterà determinato dalla direzione e dalla lunghezza di questi segmenti tangenti. I punti di controllo, oltre che con coordinate cartesiane possono essere espressi in coordinate polari riferite ai rispettivi estremi; la relatività rispetto agli estremi è segnalata dal + che le precede.

Le prime cinque curve sottostanti, che hanno tutte gli estremi in `(1,0)` e in `(3,-1)` e lo stesso primo punto di controllo, mostrano come cambia l'andamento della curva al variare del punto di controllo del secondo estremo. Nella prima immagine a sinistra: con `(1,0)..controls +(30:1cm) and (60:1cm)..(3,-1)` si indica che il punto di controllo del primo punto ha direzione 30° e dista 1cm e che la direzione della tangente al punto finale è di 60° e che il punto di controllo dista 1 cm. Negli altri casi la direzione della seconda tangente e le coordinate del punto di controllo sono indicate nel grafico. Si può notare: - che porre una distanza negativa comporta una rotazione di 180° della direzione del segmento tangente; - che superare con una tangente la direzione che congiunge idealmente i due estremi, qui circa 146°, crea un flesso. L'ultimo esempio della riga collega in un percorso chiuso tre curve di Bézier:

```
\draw (0,0) .. controls +(-60:1cm) and +(-150:.8cm) .. (2,-1)
                        .. controls +(0:.3cm) and +(0:.3cm) .. (2,-1.7)
                        .. controls +(-170:.8cm) and +(-80:1cm) .. (0,0);
```

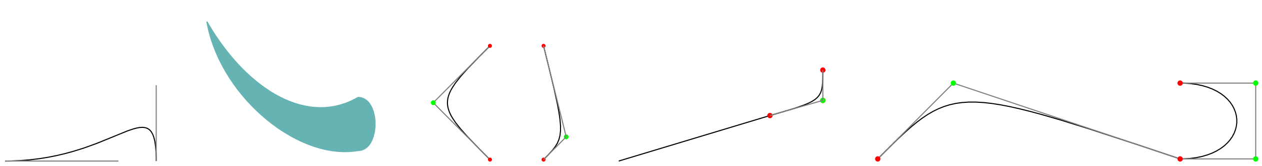
Il suo percorso ha tre estremi e visualizza le tangenti nei sei punti di controllo. Poiché si tratta di un percorso chiuso potrà essere riempito, come si vede nella seconda riga. Per farlo basta sostituire `\draw` con `\filldraw[blue!50!green!60]`.



Nella prossima riga di figure viene rappresentato per prima una curva con due punti di controllo, la prima tangente orizzontale più lunga, e con un effetto più esteso, della seconda che è verticale. Terzo, quarto e quinto caso mostrano una curva con un solo punto di controllo, segnalato in verde, gli estremi sono evidenziati in rosso. Nel quinto la prima parte a sinistra prima del punto rosso è un segmento.

Nel sesto caso, i punti fermi della curva sono i rossi (0,0), (4,0), (4,1), quelli di controllo i verdi (1,1), (5,0), (5,1). Si può notare che i primi due punti della curva sono condizionati da un solo punto di controllo, in (1,1), che in effetti esercita un doppio controllo: sia sull'arco di curva che esce dal punto (0,0) sia su quello che arriva in (4,0). Anche qui si può notare come una maggior lunghezza del segmento di controllo implica un più esteso condizionamento sulla curva. Quando dopo il punto (4,0) il codice prosegue con `.. controls (5,0) and (5,1) .. (4,1)` la parola chiave `and` unisce i due punti successivi nel ruolo di punti di controllo, il primo sulla direzione di uscita della curva dal punto (4,0) il secondo sull'arrivo della curva nel punto (4,1).

```
\draw[line width=.5pt] (0,0) .. controls (1,1) .. (4,0) .. controls (5,0) and (5,1) .. (4,1);
\draw[color=gray] (0,0) -- (1,1) -- (4,0) -- (5,0) -- (5,1) -- (4,1);
```



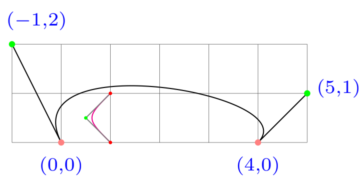
3.1 Bézier e curve parametriche

Nel tracciare una determinata curva di Bézier in genere ci si limita ad assegnare estremi e punti di controllo lasciando che il motore di calcolo di `TikZ` faccia tutto il lavoro per tracciare la curva. Non in questo esempio in cui si determinano le coordinate parametriche di una curva di Bézier del terzo ordine riferita ad una maglia. Punto iniziale e finale `(0,0)`, `(4,0)`, i punti di controllo `(-1,2)` e `(5,1)`. Si vuole mostrare come da questi quattro punti si ricavano le coordinate parametriche `x(t)=-14*\t*\t*\t +21*\t*\t-3*\t`, `y(t)=3*\t*\t*\t-9*\t*\t+6*\t` che si plottano in $0 \leq t \leq 1$ con `\draw[scale=1,domain=0:1,samples=100,variable=\t] plot ({-14*\t*\t*\t+ 21*\t*\t -3*\t},{3*\t*\t*\t-9* \t*\t+6*\t})`.

Nel `PostScript Language Reference Manual, Addison  Wesley` la voce `curveto` fornisce le coordinate parametriche della curva di Bézier di terzo grado che ha come punti iniziale e finale (x_0, y_0) e (x_3, y_3) e che è controllata dai punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Le coordinate parametriche del punto che traccia la curva sono: $x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + x_0$ e $y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + y_0$.

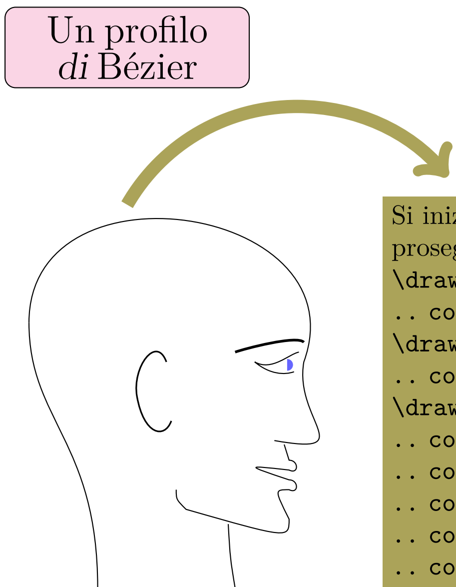
Le relazioni che danno le coordinate dei quattro punti in funzione dei coefficienti delle cubiche sono: per le ascisse $x_1 = x_0 + c_x/3$, $x_2 = x_1 + (c_x + b_x)/3$, $x_3 = x_0 + a_x + b_x + c_x$ e per le ordinate $y_1 = y_0 + c_y/3$, $y_2 = y_1 + (c_y + b_y)/3$, $y_3 = y_0 + a_y + b_y + c_y$. Da queste è semplice ricavare i coefficienti in funzione delle coordinate che in questo caso sono $a_x = x_3 - 3x_2 + 3x_1 - x_0$, $b_x = 3x_2 - 6x_1 + 3x_0$, $c_x = 3x_1 - 3x_0$ e con $a_y = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$, $b_y = 3y_2 - 6y_1 + 3y_0$, $c_y = 3y_1 - 3y_0$ e ricavare, noti i quattro punti, le coordinate parametriche della particolare curva di Bézier con cui tracciare la curva.

Nel caso di un solo punto di controllo le coordinate parametriche della cubica si ottengono formalizzandone due coincidenti, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Riprendendo il terzo caso della precedente linea di sei curve di Bézier in cui i punti iniziale e finale sono `(1,0)`, `(1,1)` con il punto di controllo in `(.5,.5)`, le coordinate parametriche della curva di Bézier, tracciata in magenta nella maglia sottostante, sono quelle del codice: `\draw [scale=1,magenta,domain=0:1,samples=20, variable=\t] plot ({1.5*\t*\t-1.5*\t+1},{\t*\t*\t -1.5*\t*\t+1.5*\t})`.




```
\begin{tikzpicture}[scale=.65]
\draw[help lines] (-1,0) grid (5,2);
\draw[scale=1,domain=0:1,samples=100,variable=\t]
  plot ({-14*\t*\t*\t+21*\t*\t-3*\t},{3*\t*\t*\t-9*\t*\t+6*\t});
\draw (0,0) -- (-1,2);
\draw (4,0) -- (5,1);
\filldraw [color=red!50] (0,0) circle (1.5pt)
(4,0) circle (1.5pt);
\filldraw [color=green](-1,2) circle (1.5pt)
(5,1) circle (1.5pt);
\coordinate [label=below:\textcolor{blue}{$\scriptstyle(0,0)$}](x0) at (0,-0.1cm);
\coordinate [label=below:\textcolor{blue}{$\scriptstyle(4,0)$}] (x3) at (4,-0.1cm);
\coordinate [label=above:\textcolor{blue}{$\scriptstyle(-1,2)$}](x1) at (-0.5,2.1cm);
\coordinate [label=right:\textcolor{blue}{$\scriptstyle(5,1)$}] (x2) at (5,1.1cm);
\end{tikzpicture}
```

3.2 Un profilo



Si inizia da `(0,0)` tracciando la fronte, proseguendo con il naso, le palpebre proseguendo con le labbra fino alla mandibola e così via.

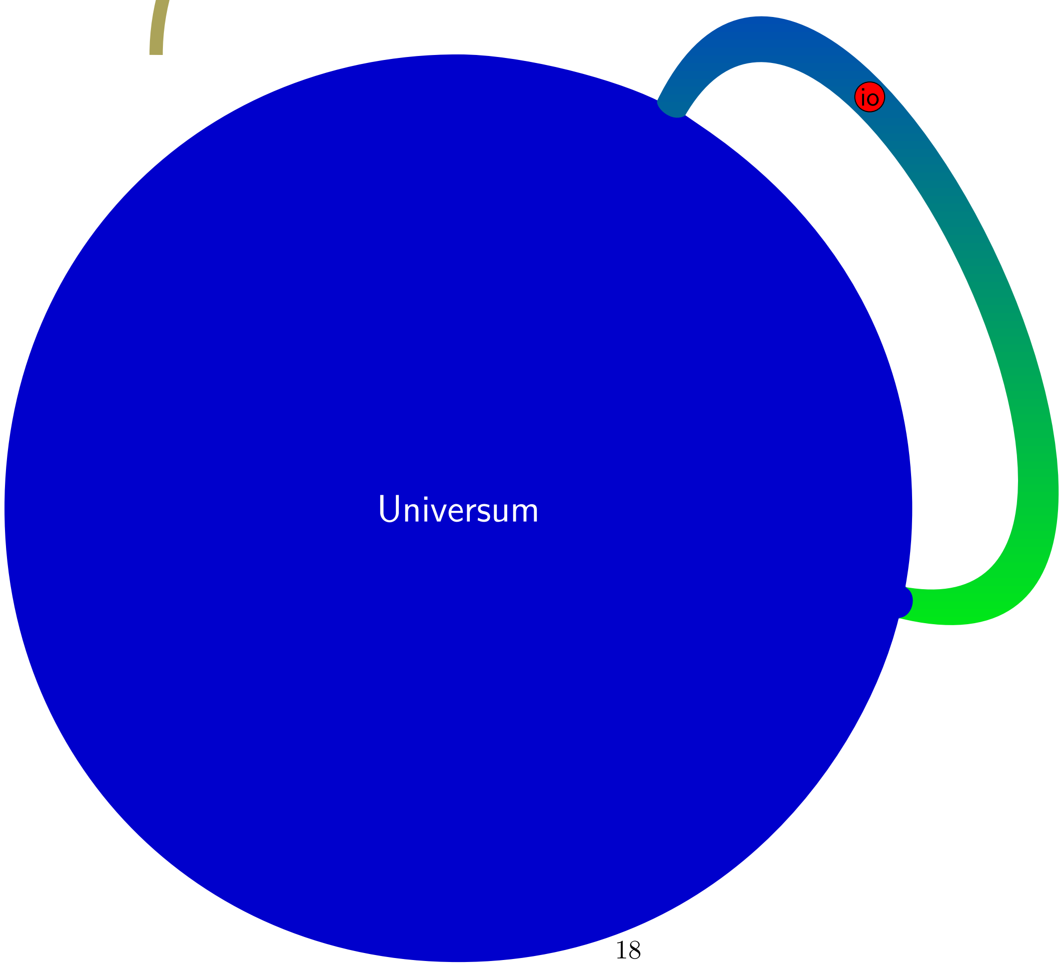
```
\draw (0,0) .. controls +(90:1.7cm) and +(70:1.7cm) .. (2.8,-.4)
.. controls +(-100:.6cm) and +(-10:.9cm) .. (2.5,-1.2);% fronte e naso
\draw (2.75,-.3) .. controls +(-170:.1cm) and +(-30:.2cm) .. (2.3,-.4)
.. controls +(-40:.2cm) and +(-160:.1cm) .. (2.7,-.5);% palpebre
\draw(2.6,-1.24) -- (2.65,-1.4)
.. controls (2.75,-1.4) and (2.75,-1.55) .. (2.65,-1.50)% sottonaso
.. controls (2.2,-1.45) .. (2.65,-1.6)% disegno bocca
.. controls (2.75,-1.6) and (2.75,-1.75) .. (2.65,-1.7)% labbro inf
.. controls (2.5,-1.7) .. (2.65,-2)% sottolabbro
.. controls (2.65,-2.2) .. (1.6,-1.9)% mento
.. controls (1.5,-1.8) .. (1.5,-1.7);% giro mandibola
\draw (2.03,-2.05) .. controls (2.05,-2.4).. (2.1,-2.7);% collo ant
\draw (0,0) .. controls +(-90:1cm) and +(90:1.5cm) ..
                                          (.7,-2.7);% occipite
\draw[line width=1pt] (2.1,-.3) .. controls +(20:.1cm) and
                           +(130:.1cm) ..(2.8,-.2);% sopracciglio
\draw[line width=.6pt] (1.4,-.4) .. controls +(110:.3cm) and +(100:
.3cm)..(1.1,-.75).. controls +(-80:.4cm) and +(-110:.2cm)..
                                          (1.45,-1);% orecchio
\fill [color=blue!60](2.63,-.37)
                                arc (90:-90:1.7pt);% semicerchio iride
```

3.3 Il mio logo

Il mio logo
con Bézier

La protrusione sulla sfera vuole visualizzare l'evento in cui si realizza l'eccezionale grado di ordine e di organizzazione necessari a dare origine ad una vita; essa si differenzia e separa dall'ambiente originario disordinato in un suo percorso individuale cosciente. L'incavo è il luogo dell'accoglimento e del ritorno della *vita* all'indistinto. Chissà, visto il nostro debolissimo sapere, che non si lasci un segno ancora indecifrato?
Il comando `\filldraw` costruisce e riempie la sfera con la protrusione e l'incavo per il percorso vitale che `shade` evidenzia con colori sfumati. Per la sfera-cerchio occorrono otto punti terminali e sedici di controllo, per il percorso vitale quattro e otto.

```
\filldraw[blue!80!black](0,6).. controls +(0:.8cm) and +(154:.7cm)
 .. (64:6).. controls +(-100:.1cm) and +(30:-.2cm) .. (60:6)
 .. controls +(-36:.5cm) and +(90:3.4cm) .. (6,0).. controls
  +(-90:.5cm) and +(-100:-.2cm) .. (-10:6) .. controls +(-24:.2cm)
  and +(0:.2cm) .. (-14:6) .. controls +(-104:2cm) and +(0:3.4cm)
 ..(0,-6).. controls +(180:3.4cm) and +(-90:3.4cm) .. (-6,0)
 .. controls +(90:3.4cm) and +(180:3.4cm) .. (0,6);
\shade[top color=blue,bottom color=green] (64:6) .. controls +(-100:.1cm)
  and +(30:-.2cm) .. (60:6).. controls +(60:4cm) and +(-10:4cm) .. (-10:6)
.. controls +(60:4cm) and +(-10:4cm) .. (-10:6)
.. controls +(-14:5.5cm) and +(64:5.5cm) .. (64:6);
\node [circle,draw,inner sep=.5pt,minimum size=3mm,rotate=0,fill=red]
 at (45:7.7){\sffamily io};
 \node [text=white,scale=1] at (0,0){\sffamily\Large Universum}.
```



4 Curve e funzioni

In un ambiente `tikzpicture` il comando `\draw` traccia la linea per i punti della funzione calcolati da `plot`. Di default i punti calcolati sono 25, ma con `samples=n` indicato tra le opzioni di `\draw` si può scegliere il numero di punti da calcolare. `plot` che utilizza il motore di calcolo `PGF` determina il percorso anche delle funzioni trascendenti.

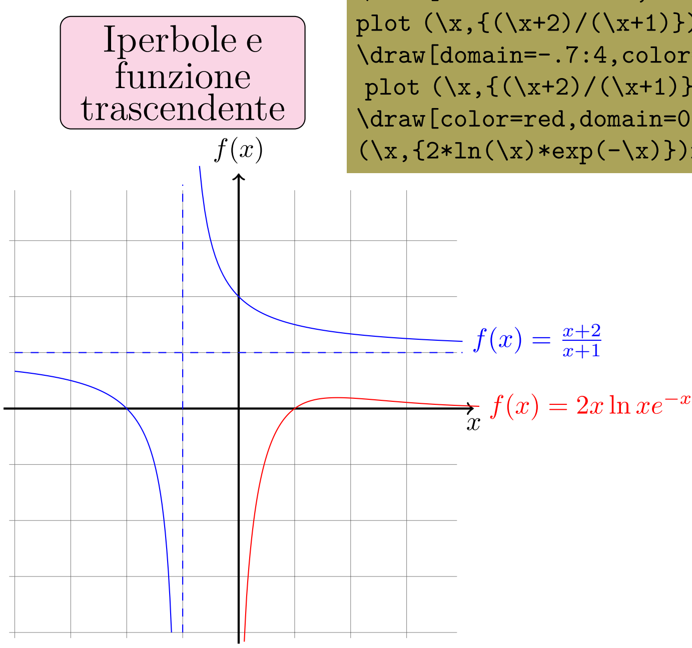
Nel primo grafico sono presentati i tracciamenti di due linee il cui dominio coincide con quello definito dall'ambiente `tikzpicture`; nel secondo anche perché si tratta in un caso di una funzione algebrica e nell'altro di una curva di Lissajous il dominio viene assegnato tra le opzioni di `\draw`. Nel caso delle funzioni goniometriche accanto al valore della variabile `\x` si precisa, scrivendo `\x r`, che il valore di `\x` è in radianti.

Il grafico esprime una sintesi molto efficace delle proprietà e della variabilità di una curva o funzione matematica ma talvolta, anche per la limitatezza dello spazio disponibile per la rappresentazione, riesce a mostrare solo una parte dei caratteri impliciti nella equazione. Il caso della funzione $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ è abbastanza emblematico. Tracciandone l'asintoto obliquo, $y = x - \frac{2}{3}$, sembrerebbe infatti di aver sbagliato qualcosa. Così come il grafico di Till Tantau che ha bisogno di qualche commento. Al contrario il grafico dell'iperbole appare autoesplicativo.

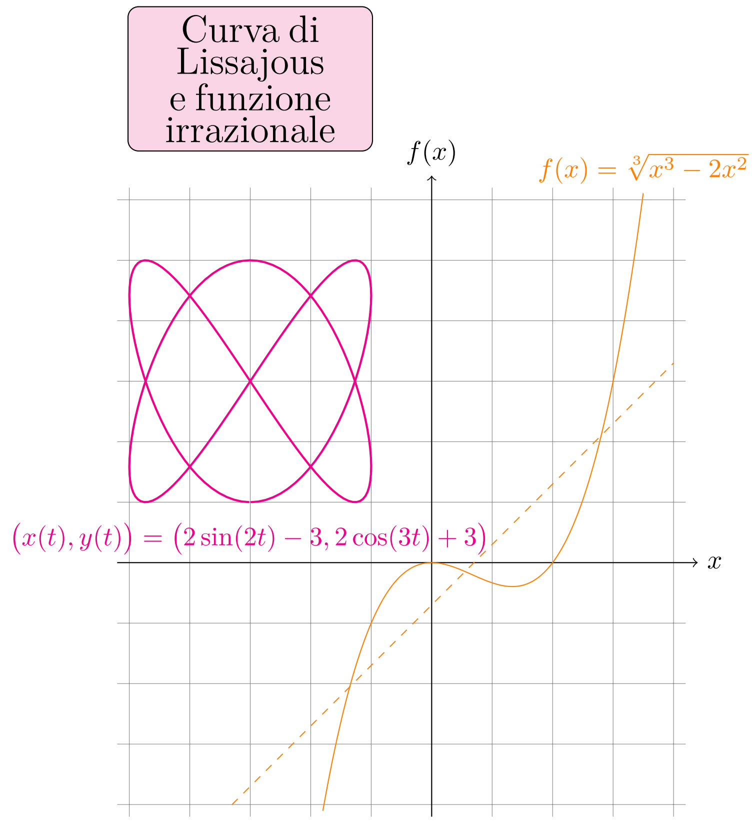
Nella stesura iniziale le indicazioni sul grafico erano contenute nel nodo colorato a lato. Nella sistemazione finale sono intervenute le divisioni in sezioni e sottosezioni con richiamo nell'indice che suggerisce di ripetere le denominazioni. È questo il senso del doppione anche della precedente sezione.

4.1 Iperbole e funzione trascendente

```
\begin{tikzpicture}[domain=0:4, scale=.8]
\node [text width=3cm, fill=magenta!20,draw,rectangle,rounded
     corners, text centered]
     at (-1,6){\Large Iperbole e funzione trascendente};
\draw[very thin,color=gray] (-4.1,-4.1) grid (3.9,3.9);
\draw[thick,->] (-4.2,0) -- (4.2,0) node[below] {$x$};
\draw[thick,->] (0,-4.2) -- (0,4.2) node[above] {$f(x)$};
\draw[domain=-4:-1.2,color=blue,samples=100]
plot (\x,{(\x+2)/(\x+1)});
\draw[domain=-.7:4,color=blue,samples=100]
 plot (\x,{(\x+2)/(\x+1)})node[right] {$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$};
\draw[color=red,domain=0.1:4.3,samples=200] plot
(\x,{2*ln(\x)*exp(-\x)})node[right]{$f(x) = 2x\ln x e^{-x}$}
```



4.2 Curva parametrica e funzione irrazionale

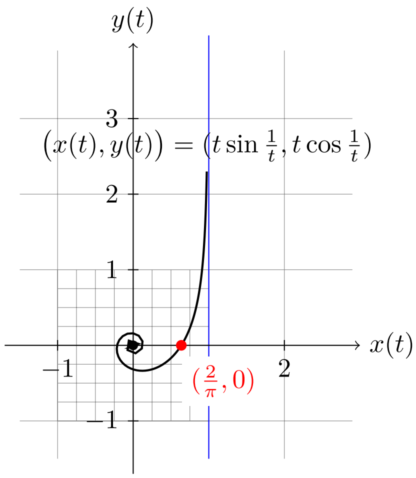


La curva colore magenta è espressa in coordinate parametriche il suo periodo, avendo $\sin(2t)$ periodo π e $\cos(3t)$ periodo $\frac{2}{3}\pi$, è 2π. Non considerando la traslazione in (-3,3), la posizione del punto iniziale è $(0, 2)$; la curva assume la stessa ascissa per $t = \pi$ in $(0, -2)$ e per $t = 2\pi$ quando chiude; la stessa ordinata per $t = \frac{2}{3}\pi$ in $(-\sqrt{3}, 2)$, per $t = \frac{4}{3}\pi$ in $(\sqrt{3}, 2)$ e in $t = 2\pi$ quando chiude.
La seconda linea, in arancio, è tale che in quanto non derivabile nell'origine in quel punto non è possibile condurne la tangente, cosa che non appare dal grafico così come dal grafico in figura non appare possibile che una retta inclinata di 45° come la retta $y = x - \frac{2}{3}$ possa esserne l'asintoto obliquo. Solo allontanandoci, per x=200, vediamo che la differenza fra le due ordinate diventa Δy =0.3, compatibile con l'idea di asintoto.
Il codice per tracciare le due linee.

```
\draw[thick,parametric,domain=-3.14:3.14,
samples=200,variable=\t,color=magenta]plot
({2*sin(2*\t r)-3},{2*cos(3*\t r )+3})node
[below=4pt]$\bigl(x(t),y(t)\bigr) = \bigl
(2\sin(2t)-3, 2\cos(3t)+3\bigr)$;
\draw[domain=-1.8:3.5,color=orange,samples=
200] plot (\x,{(\x*\x*\x-2*\x*\x)^{1/3}})
node[above] {$f(x) = \sqrt[3]{x^3-2x^2}$}.
```

4.3 Curva parametrica asintotica

Curva asintotica

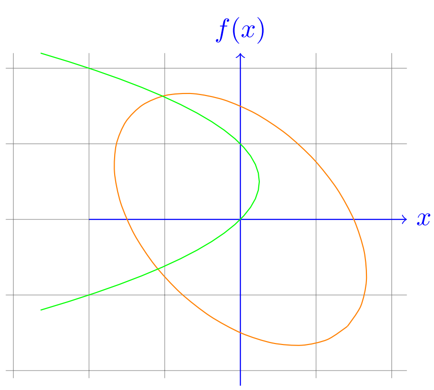


Nel grafico a fianco (Till Tantau, TikZ & PGF Manual v.2.00. pag 420) si traccia una curva in coordinate parametriche. Le griglie, quella con il passo di default di 1cm e quella interna si ottengono con `\draw[gray, very thin] (-1.5,-1.5) grid (2.9,3.9) [step=0.25cm](-1,-1) grid (1,1)`. La curva si snoda a partire dall'origine evolvendo al crescere di `t` verso un comportamento asintotico (la retta $x = 1$). L'ordinata della funzione, $t \cos \frac{1}{t}$, tende, al crescere di t a ∞; $\lim_{t\to\infty} t \cos \frac{1}{t} = \infty$ (infatti $\lim_{t\to\infty} \cos \frac{1}{t} = 1$) mentre l'ascissa, $t \sin \frac{1}{t}$, tende a 1 (infatti il $\lim_{t\to\infty} t \sin \frac{1}{t}$ è riconducibile al caso notevole di $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).
Per il tracciamento delle tacche sugli assi e delle loro posizioni si utilizza per l'asse x: `\foreach \pos in {-1,2} \draw[shift={(\pos,0)}] (0pt,2pt) -- (0pt,-2pt) node [below] {$\pos$}`. Da notare la scrittura del testo delle coordinate parametriche collegato alla posizione terminale della linea della funzione e la stampa di un cerchio rosso di 2pt con le relative coordinate che sono collegate a un nodo reso ben visibile dall'aver prima coperto con il bianco la posizione in cui si colloca quel testo: `\fill[red] (0.63662,0) circle (2pt) node [below right,fill=white,yshift=-4pt] {$(\frac{2}{\pi},0)$}`.
Il codice per il tracciamento della curva:

```
\draw[thick,parametric,domain=0.01:2.5,samples=
200,variable=\t]plot ({(\t)*sin(1/\t r)},
{(\t)*cos(1/\t r )})...
```

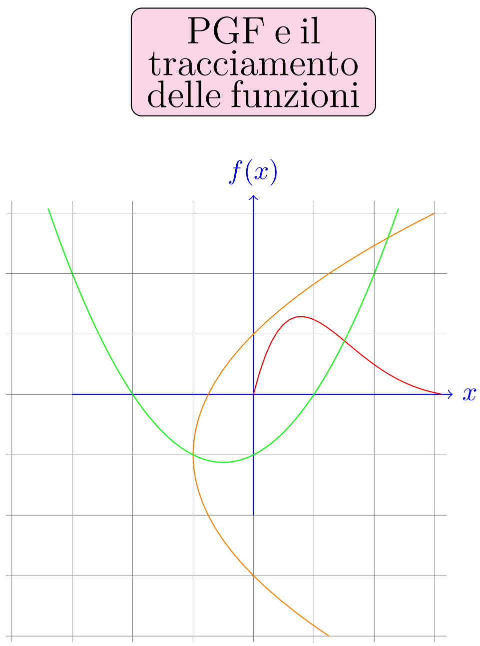
4.4 TikZ e coniche

TikZ: ellisse e parabola



Una ellisse può essere plottata in coordinate parametriche con gli assi coincidenti con quelli cartesiani e poi ruotata e traslata; similmente la parabola. Per l'ellisse: `\draw[color=orange,scale=1,domain=-3.141: 3.141, smooth,variable=\t,rotate=45]plot({1.25*sin(\t r)}, {2*cos(\t r)})` e una parabola `(f(x),x)` con asse parallelo all'asse delle ascisse, che è una funzione solo in quanto la variabile indipendente è `y`: `\draw[color= green, scale=1,domain=-1.2:2.2,samples=30,variable=\y] plot({-1*\y*\y +\y}, {\y})`.

4.5 PGF e funzioni



Per le funzioni in coordinate cartesiane si possono utilizzare i comandi `pgf` anche se quelli `draw` sono più flessibili. `\pgfplothandlerlineto` predispone il manipolatore di flusso dei dati; `\pgfplotfunction`, per iterazione sullo stile di `foreach`, crea la lista dei valori in corrispondenza dei quali calcolare con `\pgfpointxy` i valori della variabile dipendente. La linea dei punti calcolati è tracciata con `\pgfusepath{stroke}`.
Nella figura a lato una volta si calcolano i punti `(f(x),x)` di una parabola con i comandi `pgf`; dominio e i punti da calcolare con `\pgfpointxy` sono espressi dalla istruzione `\pgfplotfunction{\x}{-3.4,-3.2, ...,3.2}{\pgfpointxy{0.25*\x*\x +0.5*\x-0.75}{\x}};` anche colore e tracciamento sono comandi `pgf`: `\pgfsetstrokecolor{orange}` e `\pgfusepath{stroke}`.
Anche la linea rossa della funzione `y=exp(-\x)*4*sin(\x r)` è tracciata con i comandi `pgf`: `\pgfplotfunction{\x} {0,0.1,...,3.14}{\pgfpointxy{\x}{exp(-\x)*4* sin(\x r)}}` `\pgfsetstrokecolor{red}`. Lo stesso per la linea verde la cui equazione è data sotto.
Sorge un problema se si deve applicare una rotazione ad una delle linee rappresentate. Infatti non riesco a chiudere l'ambiente `pgf` aperto internamente a quello `tikzpicture`, neanche con `\pgfplotstreamend` o `\pgfplothandlerdiscard`, e la rotazione si estende a tutti i comandi che la seguono. Anche al nodo che contiene il commento. Pertanto nel caso di una rotazione, ad esempio della linea verde, allo stato dovrei rientrare nell'ambiente TikZ con un comando `\draw` del tipo: `\draw[color=green,scale=1,domain=-3.4:2.4,samples= 30, variable=\x, rotate=30]plot(\x,{0.5*\x*\x +0.5* \x-1})`.

5 Conclusioni

Mi pare che `TikZ` sia orientato a mettere a disposizione dell'utente un prodotto per quanto possibile pronto a risolvere le sue esigenze, da qui la numerosità dei suoi comandi. In effetti non ci sono particolari difficoltà ad utilizzarli anche se TikZ e PGF talvolta vanno a sovrapporsi mettendo l'utente di fronte a dubbi che non facilitano.

`TikZ` è attraente per il suo modo accattivante di fare grafica anche se non è particolarmente conciso.